

**V Encuentro Conjunto de la
Real Sociedad Matemática Española (RSME)
y la
Sociedad Matemática Mexicana (SMM)**

14-18 de junio de 2021

Centro de Investigación en Matemáticas (CIMAT), Guanajuato,
México (virtual)

<https://rsmeysmm.eventos.cimat.mx/node/1409>

Programa de la Sesión Especial

Geometría Lorentziana y Aplicaciones

Conferenciantes: Luis Alberto Aké Hau (UADY), Alma Luisa Albuje
Brotos (UCO), Miguel Brozos Vázquez (UDC), Ixchel Gutiérrez Rodríguez
(UCOL / UVIGO), Jonatán Herrera Fernández (UCO), Miguel Ortega Ti-
tos (UGR), Gabriel Ruiz Hernández (UNAM).

Organizadores: Luis José Alías Linares (UM) y Oscar Alfredo Palmas
Velasco (UNAM)

Programa (Lunes, 14 de junio de 2021)

- 12:00-13:00 (GTM-5) / 19:00-20:00 (GTM +2):

- Jonatán Herrera Fernández (UCO): *Espacio-tiempos admitiendo simetrías conformes y la conjetura de Bartnik.*

- 13:00-14:00 (GTM-5) / 20:00-21:00 (GTM +2):

Preguntas y discusión sobre las conferencias grabadas:

- Luis Alberto Aké Hau: *Escalera causal en espacios de longitud Lorentzianos.*
- Alma L. Albuje: *Unicidad en la descomposición de espacio-tiempos estáticos estándar.*
- Miguel Brozos Vázquez: *Métricas críticas en variedades de Walker de dimensión 3.*
- Ixchel Dzohara Gutiérrez Rodríguez: *Sobre la clasificación de variedades homogéneas pseudo-Riemannianas en dimensión 4.*
- Miguel Ortega: *Solitones de traslación en el Minkowski invariantes ortogonal y ortocrono.*
- Gabriel Ruiz-Hernández: *Hipersuperficies semi riemannianas con dirección principal canónica.*

Títulos y resúmenes

- Luis Alberto Aké Hau (Universidad Autónoma de Yucatán)
luis.ake@correo.uady.mx

Título: *Escalera causal en espacios de longitud Lorentzianos.*

Resumen: De manera clásica los espacio-tiempos de la relatividad general son modelados por variedades diferenciables con métricas de signatura 1 y regularidad al menos C^2 . Sin embargo, en los últimos años el interés por estudiar espacio-tiempos con métricas de Lorentz de baja regularidad ha crecido, véase [1, 2, 3]. Recientemente, M. Kunzinger y C. Sämann han obtenido una aproximación sintética a la geometría de Lorentz, los denominados *espacios de longitud Lorentzianos*, obteniendo un análogo a la teoría de espacios de longitud en el contexto de la geometría Lorentziana (véase [4]). En esta charla presentaremos resultados que conciernen a la escalera causal en el contexto de los espacios de longitud Lorentzianos (véase [5]).

Referencias

- [1] P. T. Chruściel and J.D.E. Grant. *On Lorentzian causality with continuous metrics*, Class. Quantum Grav. 29 145001 (2012)
- [2] M. Graf, J.D.E. Grant, M. Kunzinger and R. Steinbauer. *The Hawking-Penrose singularity theorems for $C^{1,1}$ -Lorentzian metrics*, Commun. Math. Phys. 360: 1009. (2018)
- [3] Kunzinger M, Steinbauer R, Stojkovi M and Vickers J *A regularisation approach to causality theory for $C^{1,1}$ -Lorentzian metrics* Gen. Relativ. Gravit. 46 1738 (2014)
- [4] M. Kunzinger and C. Sämann. *Lorentzian length spaces*. C. Ann Glob Anal Geom 54: 399. <https://doi.org/10.1007/s10455-018-9633-1> (2018)
- [5] L. Aké Hau, A. Cabrera and D. Solís. *On the causal hierarchy of Lorentzian length spaces*. Class. Quantum Grav. 37 215013 (2020)

- Alma L. Albuje (Universidad de Córdoba)

Título: *Unicidad en la descomposición de espacio-tiempos estáticos estándar.*

Resumen: En esta charla presentamos una nueva aproximación para el estudio de espacio-tiempos que admiten una descomposición como un espacio-tiempo estático estándar. Con nuestras técnicas somos capaces de dar una prueba alternativa para la unicidad de la descomposición en el caso espacialmente cerrado, ya estudiada previamente

por Sánchez y Senovilla y por Aledo, Romero y Rubio. No obstante, también consideramos el estudio de la unicidad para modelos estáticos estándar que tengan como base una hipersuperficie espacial completa (no necesariamente compacta) bajo ciertas hipótesis adicionales.

Los resultados presentados en esta charla son parte de un trabajo conjunto con Jónatan Herrera y Rafael M. Rubio.

- Miguel Brozos Vázquez (Universidad de la Coruña)

Título: *Métricas críticas en variedades de Walker de dimensión 3.*

Resumen: Consideramos una variedad Lorentziana (M, g) de dimensión 3. Dado que el tensor curvatura está determinado por el tensor de Ricci, los funcionales cuadráticos de la curvatura son de la forma

$$\mathcal{S} : g \mapsto \int_M \tau^2 dvol_g \quad \text{ó} \quad \mathcal{F}_t : g \mapsto \int_M (\tau^2 + t\|\rho\|^2) dvol_g$$

para algún $t \in \mathbb{R}$, donde τ representa la curvatura escalar y ρ el tensor de Ricci de la variedad.

Las variedades de Walker son aquellas que admiten una distribución nula paralela y desempeñan un destacado papel en Geometría Lorentziana. Estudiaremos qué métricas de Walker son críticas para alguno de los funcionales cuadráticos de la curvatura.

Analizando las ecuaciones de Euler-Lagrange asociadas a estos funcionales, veremos que una métrica de Walker es crítica para \mathcal{S} si y sólo si la curvatura escalar se anula. Sin embargo, si una métrica de Walker es crítica para \mathcal{F}_t , con $t \neq -\frac{1}{2}, -\frac{1}{3}, -\frac{1}{4}$, no basta con que $\tau = 0$ y además la métrica es crítica para todos los funcionales cuadráticos de la curvatura. Los funcionales $\mathcal{F}_{-\frac{1}{2}}$, $\mathcal{F}_{-\frac{1}{3}}$ y $\mathcal{F}_{-\frac{1}{4}}$ son especiales en este sentido y existen métricas de Walker que son críticas para ellos pero no para los demás. Describiremos estos casos con mayor profundidad.

- Ixchel Dzohara Gutiérrez Rodríguez (Universidad de Colima/Universidad de Vigo)

Título: *Sobre la clasificación de variedades homogéneas pseudo-Riemannianas en dimensión 4.*

Resumen: El estudio de la propiedad de ser Einstein conforme para una variedad es especialmente relevante en la situación Lorentziana ya que permite la construcción de métricas críticas para el funcional de Einstein-Hilbert en donde se respeta la estructura causal de la variedad en consideración. En esta charla estudiaremos la clasificación de métricas homogéneas Riemannianas [1] y métricas homogéneas

pseudo-Riemannianas, ésta última para el caso no reductivo [2]. Finalmente, hablaremos sobre las dificultades para abordar el análisis de las métricas homogéneas Lorentzianas, pues a diferencia del caso Riemanniano, no existe unicidad de solución para las métricas Einstein conformes y sin duda se requiere un análisis computacional muy exigente.

Referencias

- [1] E. Calviño-Louzao, X. García-Martínez, E. García-Río, I. Gutiérrez-Rodríguez, and R. Vázquez- Lorenzo *Conformally Einstein and Bach-flat four-dimensional homogeneous manifolds*, J. Math. Pures Appl. 130 (2019) 347–374.
- [2] E. Calviño-Louzao, E. García-Río, I. Gutiérrez-Rodríguez, and R. Vázquez- Lorenzo, *Conformal geometry of non-reductive four-dimensional homogeneous spaces*, Math. Nachr. 290 (2017), no. 10, 1470–1490.

- Jonatán Herrera (Universidad de Córdoba)

Título: *Espacio-tiempos admitiendo simetrías conformes y la conjetura de Bartnik.*

Resumen: La existencia de un campo conforme temporal global definido sobre un espacio-tiempo (M, g) permite obtener información relevante sobre su estructura geométrica. Por ejemplo, si dicho campo resulta ser completo, el espacio-tiempo admite una descomposición global como un espacio-tiempo conformemente estacionario estándar.

En esta charla, analizaremos algunas de las propiedades geométricas que podemos deducir en un espacio-tiempo globalmente hiperbólico que admite un campo conforme temporal, sea este completo o no. En particular, veremos como dichas propiedades nos permiten obtener resultados parciales sobre la denominada *conjetura de Bartnik*, la cual establece que todo espacio-tiempo temporalmente geodésicamente completo, admitiendo una hipersuperficie de Cauchy compacta y satisfaciendo la condición de convergencia temporal debe ser isométrico a un espacio-tiempo producto.

Esta charla está basada en un trabajo conjunto con los Profs. Ivan P. Costa e Silva y José Luis Flores (*Ref: Mediterranean Journal of Mathematics, volumen 17, Número 21 (2020)*).

- Miguel Ortega (Universidad de Granada)

Título: *Solitones de traslación en el Minkowski invariantes ortogonal y ortocrono.*

Resumen: Estudiamos solitones de traslación del flujo por curvatura media. Concretamente, consideramos variedades semi-Riemannianas que en abiertos adecuados admiten acciones de grupos por isometrías cuyas órbitas tienen codimensión 1. Como aplicación, en el espacio de Minkowski \mathbb{L}^{n+2} , $n \geq 1$, clasificamos aquellos que son invariantes por los grupos especial ortogonal $SO(n)$ y ortocrono $SO^\uparrow(n-1, 1)$, tanto espaciales como temporales. De esta manera, a partir de una curva generatriz adecuada, se reconstruyen los solitones. En el caso temporal, se describe un ejemplo con más de una curva generatriz, lo cual es imposible en Geometría Riemanniana.

Basado en el trabajo conjunto con Marie-Amélie Lawn (Imperial College London, UK) <https://arxiv.org/abs/2011.06915>

- Gabriel Ruiz-Hernández (Universidad Nacional Autónoma de México)

Título: *Hipersuperficies semi riemannianas con dirección principal canónica.*

Resumen: Es bien conocido que una hipersuperficie M inmersa en una variedad semi-Riemanniana o Lorentziana, no necesariamente tiene una dirección principal, es decir un vector propio de su operador de forma. En esta charla vamos a considerar hipersuperficies M con dirección principal canónica (DPC), es decir su operador de forma sí tiene un vector propio no degenerado y el cual es la parte tangente T sobre M de un campo vectorial Z en el ambiente. Vamos a estudiar el caso cuando Z es un campo cerrado conforme. Este es un trabajo conjunto basado en la tesis de maestría de Adrian Garcia Dinorin.

Una propiedad básica es que tales hipersuperficies M son foliadas por geodésicas. Un ejemplo en la literatura son las superficies de ángulo constante con respecto a un campo Z , paralelo en el ambiente, las cuales tienen dirección principal canónica. Veremos que una superficie no degenerada con curvatura media constante y DPC en un ambiente Lorentziano de curvatura constante tiene una simetría: Admite un campo de Killing orthogonal a su dirección principal canónica.