

**V Encuentro Conjunto de la
Real Sociedad Matemática Española (RSME)
y la
Sociedad Matemática Mexicana (SMM)**

14-18 de junio de 2021

Centro de Investigación en Matemáticas (CIMAT), Guanajuato,
México (virtual)

<https://rsmeysmm.eventos.cimat.mx/node/1409>

Programa de la Sesión Especial

Ecuaciones Elípticas

Conferenciantes: Begoña Barrios Barrera (ULL), Judith Campos Cordero (UNAM), Azahara de la Torre Pedraza (UGR), Félix del Teso Méndez (UCM), Juan Carlos Fernández Morelos (UNAM), Xavier Fernández Real (EPFL), Alberto Saldaña De Fuentes (IMATE UNAM).

Organizadores: Héctor Chang Lara (CIMAT) y Fernando Charro (WSU).

Programa (Miércoles, 16 de junio de 2021)

- 12:00-13:00 (GTM-5) / 19:00-20:00 (GTM +2):

- Azahara de la Torre Pedraza: *From Conformal Geometry to the study of elliptic PDEs.*

- 13:00-14:00 (GTM-5) / 20:00-21:00 (GTM +2):

Preguntas y discusión sobre las conferencias grabadas:

- Xavier Fernández Real : *Regularidad genérica para el problema del obstáculo fraccionario.*

- Judith Campos Cordero: *Regularidad parcial para minimizantes locales.*

- Begoña Barrios Barrera: *Different notions of solutions in fractional nonlinear non-homogeneous problems: equivalence results.*

- Juan Carlos Fernández Morelos: *Un método de reducción de EDP's semilineales.*

- Alberto Saldaña De Fuentes: *El laplaciano fraccionario de alto orden: un puente entre el laplaciano y el bilaplaciano.*

- Félix del Teso Méndez: *The Liouville Theorem and linear operators satisfying the maximum principle.*

Se sugiere ver los videos de las conferencias en el orden en que están listadas.

Títulos y resúmenes

- Azahara De la Torre Pedraza (Universidad de Granada)

Título: *From Conformal Geometry to the study of elliptic PDEs.*

Resumen: The so called Yamabe problem in Conformal Geometry is finding a metric conformal to a given one and which has constant scalar curvature. From the analytic point of view, this problem becomes a semilinear elliptic PDE with critical (for the Sobolev embedding) power non-linearity. If we study the problem in the Euclidean space, allowing the presence of nonzero-dimensional singularities can be transformed into reducing the non-linearity to a Sobolev-subcritical power. A quite recent notion of non-local curvature gives rise to a parallel study which weakens the geometric assumptions giving rise to a non-local semilinear elliptic (Sobolev-critical) PDE. In this talk, we will focus on the Euclidean space in the presence of singularities of maximal possible dimension. In both cases, local and non-local, we will construct singular solutions of a local/non-local semilinear elliptic equation with superlinear nonlinearity which is subcritical for Sobolev embeddings, but it is critical for the existence of singular solutions (below such threshold the singularity is removable).

This is a joint work with H. Chan.

- Xavier Fernández-Real (École Polytechnique fédérale de Lausanne, Suiza)

Título: *Regularidad genérica para el problema del obstáculo fraccionario.*

Resumen: El problema del obstáculo fraccionario en \mathbb{R}^n con obstáculo $\varphi \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ puede escribirse como

$$\min\{(-\Delta)^s u, u - \varphi\} = 0, \quad \text{en } \mathbb{R}^n.$$

El conjunto $\{u = \varphi\} \subset \mathbb{R}^n$ se llama “conjunto de contacto”, y su frontera es la “frontera libre”, una incógnita del problema.

La frontera libre puede dividirse en dos subconjuntos: los puntos regulares (alrededor de los cuáles la frontera libre es diferenciable, y es $(n - 1)$ -dimensional) y los puntos degenerados.

El conjunto de puntos degenerados, incluso para obstáculos regulares, puede ser muy grande (por ejemplo, con infinita medida \mathcal{H}^{n-1}). En un trabajo conjunto con X. Ros-Oton mostramos, sin embargo, que genéricamente las soluciones del problema del obstáculo fraccionario

tienen un conjunto degenerado de dimensión menor. Es decir, para casi toda solución (en un sentido adecuado), el conjunto de puntos degenerados tiene dimensión menor.

- Judith Campos Cordero (Universidad Nacional Autónoma de México)

Título: *Regularidad parcial para minimizantes locales.*

Resumen: En esta charla discutiremos las propiedades de regularidad que satisfacen los minimizantes locales de funcionales integrales quasiconvexos no homogéneos, extendiendo así los resultados de Evans (1986) y de Kristensen & Taheri (2001). Además de la quasiconvexidad y regularidad de clase C^2 , suponemos que la energía interna de los funcionales en cuestión satisface un crecimiento polinomial de orden mayor o igual a 2.

- Begoña Barrios Barrera (Universidad de La Laguna)

Título: *Different notions of solutions in fractional nonlinear non-homogeneous problems: equivalence results.*

Resumen: Along this talk we study different notions of solutions for a non-homogeneous equation whose main operator is nonlinear and nonlocal and with a lower order term that depends on a kind of a fractional derivative. In particular we establish the equivalence between weak and viscosity solutions in this framework. The results of the talk have been obtained in collaboration with María Medina (Universidad Autónoma de Madrid)

- Juan Carlos Fernández Morelos (Universidad Nacional Autónoma de México)

Título: *Un método de reducción de EDP's semilineales.*

Resumen: En esta charla veremos cómo la geometría de la esfera determina gran cantidad de soluciones de ecuaciones diferenciales semilineales tipo curvaturas (escalares y Q -curvaturas) prescritas. Concretamente, estudiaremos cómo ciertas hipersuperficies en la esfera permiten escribir un tipo de “Laplaciano radial generalizado”, permitiendo reducir las ecuaciones diferenciales parciales en una EDO con coeficientes singulares, como ocurre al buscar soluciones radiales en \mathbb{R}^n . Aplicaremos esta reducción para mostrar que existen soluciones que cambian de signo al problema de Yamabe en la esfera con un número prescrito de conjuntos nodales y con una geometría prescrita de sus conjuntos de nivel. Extenderemos este resultado al caso semi-Riemanniano donde enunciaremos un resultado análogo para ecuaciones de onda no lineales ultrahiperbólicas. Finalmente, veremos

cómo éste método permite, asimismo, reducir ecuaciones poliarmonicas en problemas unidimensionales.

- Alberto Saldaña De Fuentes (Universidad Nacional Autónoma de México)

Título: *El laplaciano fraccionario de alto orden: un puente entre el laplaciano y el bilaplaciano.*

Resumen: Las soluciones de problemas lineales y no lineales que involucran al laplaciano y al bilaplaciano (el laplaciano al cuadrado) exhiben comportamientos cualitativos muy diferentes en algunas situaciones. Por ejemplo, una diferencia bien conocida es la falta de principios del máximo para el bilaplaciano, lo cual provoca que su conjunto de soluciones sea muy diverso y complejo. En general, los problemas de alto orden son desafiantes y su estudio se encuentra aún subdesarrollado.

En esta plática nos concentraremos en la siguiente pregunta: ¿Qué ocurre entre el laplaciano y el bilaplaciano? Para contestarla, pondremos el estudio del laplaciano fraccionario de alto orden para establecer un puente entre los problemas (lineales y no lineales) de segundo orden y los de alto orden.

- Félix del Teso Méndez (Universidad Complutense de Madrid)

Título: *The Liouville Theorem and linear operators satisfying the maximum principle.*

Resumen: The classical Liouville Theorem states that bounded harmonic functions are constant. The talk will revisit this result for the most general class of linear operators with constant coefficients satisfying the maximum principle (characterized by Courrège in [2]). The class includes local and nonlocal and not necessarily symmetric operators among which you can find the fractional Laplacian, Relativistic Schrödinger operators, convolution operators, CGMY, as well as discretizations of them.

We give a full characterization of the operators in this class satisfying the Liouville property. When the Liouville property does not hold, we also establish precise periodicity sets of the solutions.

The techniques and proofs of [1] combine arguments from PDEs, group theory, number theory and numerical analysis (and still, they are simple, short, and very intuitive).

References

- [1] N. Alibaud, F. del Teso, J. Endal, and E. R. Jakobsen. *The Liouville theorem and linear operators satisfying the maximum principle*. Journal de Mathématiques Pures et Appliquées, 142:229–242, 2020.
- [2] P. Courrège. *Générateur infinitésimal d'un semi-groupe de convolution sur R^n , et formule de Lévy-Khinchine*. Bull. Sci. Math. (2), 88:3–30, 1964.

Joint work with *N. Alibaud* (Laboratoire de Mathématiques de Besançon), *J. Endal* (Universidad Autónoma de Madrid) and *E. R. Jakobsen* (Norwegian University of Science and Technology).