V Encuentro Conjunto de la Real Sociedad Matemática Española (RSME) y la Sociedad Matemática Mexicana (SMM)

14-18 de junio de 2021

Centro de Investigación en Matemáticas (CIMAT), Guanajuato, México (virtual)
https://rsmeysmm.eventos.cimat.mx/node/1409

Programa de la Sesión Especial

Álgebra computacional y aplicaciones

Conferenciantes: Víctor Castellanos Vargas (UJAT), Julián Cuevas-Rozo (UNIRIOJA y UNAL), Ignacio García Marco (ULL), Luis Núñez Betancurt (CIMAT), Rubí Pantaleón Mondragón (CCM), Patricia Pascual-Ortigosa (UNIRIOJA), Carlos Enrique Valencia Oleta (CINVESTAV).

Organizadores: Abraham Martín del Campo Sánchez (CONACYT-CIMAT), Ana Romero Ibáñez (UNIRIOJA).

Programa (Viernes, 18 de junio de 2021)

- 12:00-13:00 (GTM-5) / 19:00-20:00 (GTM +2):
  - Luis Núñez Betancurt: *Aspectos computacionales de las potencias simbólicas.*

- 13:00-14:00 (GTM-5) / 20:00-21:00 (GTM +2):

  Preguntas y discusión sobre las conferencias grabadas:
  - Víctor Castellanos Vargas: *El cálculo algebraico y computacional de la Característica de Euler-Poincaré del espacio de configuraciones de un polígono.*
  - Julián Cuevas-Rozo: *Algoritmos efectivos para el cálculo de homología en espacios topológicos finitos.*
  - Ignacio García Marco: *Sensibilidad en grafos de Cayley.*
  - Rubí Pantaleón Mondragón: *Algoritmo Betti-Euler: un método para detectar foliaciones.*
  - Patricia Pascual-Ortigosa: *Depolarización de ideales monomiales aplicado a fiabilidad de sistemas.*
  - Carlos Enrique Valencia Oleta: *Algunos aspectos algorítmicos de las estructuras aritméticas.*

Títulos y resúmenes

- Luis Núñez Betancurt (Centro de Investigación en Matemáticas)
  Título: *Aspectos computacionales de las potencias simbólicas.*
  Resumen: Las potencias simbólicas de ideales han encontrado usos en teoría de singularidades, operadores diferenciales y optimización lineal. En esta charla discutiremos recientes avances de este tema en ideales monomiales y en ideales de determinantes.

- Víctor Castellanos Vargas (Universidad Juárez Autánoma de Tabasco)
  Título: *El cálculo algebraico y computacional de la Característica de Euler-Poincaré del espacio de configuraciones de un polígono.*
  Resumen: Consideramos un polígono de n-lados (M_n) en el plano. Si "desconectamos" el polígono en un vértice, nos queda algo así como un brazo con n nodos (A_n) y lo que deseamos es describir el conjunto de todas las posiciones del polígono M_n preservando las longitudes de los lados, es decir, el espacio de movimientos del brazo A_n, en el el espacio R^k.

- Julián Cuevas-Rozo (Universidad de la Rioja y Universidad Nacional de Colombia)
  Título: *Algoritmos efectivos para el cálculo de homología en espacios topológicos finitos.*
  Resumen: Un espacio finito es un espacio topológico en el cual su conjunto subyacente es finito. El estudio de los espacios finitos es un problema de gran interés desde el punto de vista topológico, no solamente por el hecho de expandir y enriquecer la teoría que describe dichos objetos matemáticos, sino porque ellos pueden ser usados como modelos de una amplia clase de espacios topológicos que incluyen los CW-complejos regulares y h-regulares. Por lo tanto, es importante proporcionar herramientas, tanto teóricas como computacionales, que permitan determinar invariantes topológicos de espacios finitos.

  En esta charla presentaremos un módulo implementado en el sistema de álgebra computacional Kenzo, que permite el cálculo de grupos de homología y sus generadores, así como otros invariantes homotópicos de espacios finitos. Los algoritmos implementados combinan versiones constructivas de resultados conocidos acerca de espacios topológicos con métodos combinatorios usados sobre espacios finitos. En el caso particular de espacios finitos h-regulares, se han desarrollado métodos efectivos en los que la técnica de campos de vectores discretos puede ser aplicada para mejorar los algoritmos anteriores.

- Ignacio García Marco (Universidad de La Laguna)
  Título: *Sensibilidad en grafos de Cayley.*
  Resumen: A principios de los 90, Nisan y Szegedi formulan la llamada conjetura de la sensibilidad, que postula la existencia de una relación polinomial entre dos medidas de la complejidad de una función booleana: la sensibilidad puntual y la sensibilidad por bloques. Ese mismo año, Gotsman y Linial reformulan la conjetura en términos del grafo obtenido al tomar el esqueleto del hipercubo. En 2019, Huang presenta una prueba sorprendentemente simple y elegante de la conjetura de la sensibildad que hace uso de la citada reformulación del problema y herramientas básicas de álgebra lineal. Inmediatamente después, trabajos de Alon-Zheng y Potechin-Tsang extienden el resultado de Huang para grafos asociados a grupos abelianos finitos. Además, preguntan: (1) ¿se tienen resultados análogos para grafos asociados grupos no abelianos? y, en caso de no ser así, (2) ¿qué familias de grupos no abelianos tienen un comportamiento similar al del esqueleto del hipercubo?. En esta charla presentaremos familias de ejemplos que responden negativamente a (1). Asimismo, propondremos y mostraremos evidencias de que los grafos asociados a grupos de Coxeter pueden dar respuesta a (2). Los resultados de este trabajo son en colaboración con Kolja Knauer (Universitat de Barcelona).

- Rubí Pantaleón Mondragón (Centro Ciencias Matemáticas, Morelia)
  Título: *Algoritmo Betti-Euler: un método para detectar foliaciones.*
  Resumen: Una foliación singular descompone una variedad en subvariedades de la misma dimensión salvo en un conjunto de codimensión mayor que uno. Sobre el plano proyectivo complejo este conjunto determina un ideal en el anillo de polinomios $\mathbb{C}[x, y, z]$ con algunos invariantes muy específicos. Sin embargo, cuando consideramos un ideal con estos mismos invariantes puede que este no esté asociado a una foliación. En esta plática hablaré de un método programable con herramientas de álgebra conmutativa que nos determina si un ideal dado proviene de una foliación. Veremos algunos ejemplos como aplicación del método y platicaré algunos problemas que no están resueltos de manera total.

- Patricia Pascual-Ortigosa (Universidad de La Rioja)
  Título: *Depolarización de ideales monomiales aplicado a fiabilidad de sistemas.*

Resumen: En esta charla presentaremos dos operaciones inversas, polarización y depolarización, las cuales nos permiten transformar ideales monomiales en ideales monomiales libres de cuadrados, y viceversa. Debido a que la depolarización de un ideal monomial libre de cuadrados no es única, introduciremos una herramienta algebraica llamada support poset, que nos ayudará a encontrar todas las posibles depolarizaciones de un ideal monomial libre de cuadrados. En la primera parte de la charla, trabajaremos con la polarización y la depolarización junto con los support posets, mostrando cómo funcionan y presentando resultados teóricos. En la segunda parte, introduciremos la Fiabilidad de Sistemas desde un punto de vista algebraico para, finalmente, usar toda la teoría presentada para calcular la fiabilidad de sistemas.

- Carlos Enrique Valencia Oleta (Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del IPN)

  Título: *Algunos aspectos algorítmicos de las estructuras aritméticas.*

  Resumen: Sea M una matriz entera no negativa de $n \times n$ con todas sus entradas de la diagonal igual a cero. Una estructuras aritmética (EA) sobre M es un par$(\mathbf{d}, \mathbf{r}) \in \mathbb{N}_+^n \times \mathbb{N}_+^n$ tal que $\gcd(\mathbf{r}_v \mid v \in V(G)) = 1$ y

  $$(\operatorname{diag}(\mathbf{d}) - M)\mathbf{r}^t = \mathbf{0}^t.$$

  La matriz Laplaciana de una gráfica es una EA. De manera más precisa, si M es la matriz de adyacencia de una gráfica G y $\mathbf{d}$ es su vector de grados, entonces $\operatorname{diag}(\mathbf{d}) - M$ es la matriz Laplaciana de G y $(\operatorname{diag}(\mathbf{d}) - M)\mathbf{1} = \mathbf{0}$.

  El concepto de EA fue introducido por Lorenzini como las matrices de intersección que aparecen en el estudio de degeneración de curvas en geometría algebraica. Se puede demostrar que M es irreducible sí y solo sí

  $$\mathcal{A}(M) = \{(\mathbf{d}, \mathbf{r}) \in \mathbb{N}_+^n \times \mathbb{N}_+^n \mid (\operatorname{diag}(\mathbf{d}) - M)\mathbf{r}^t = \mathbf{0}^t\}$$

  es finito. Luego, es natural preguntarse acerca de un algoritmo que las compute.

  Sea $X = (x_1, \ldots, x_n)$ el vector con una variable en cada una de sus entradas y

  $$f_M(X) = \det(\operatorname{diag}(X) - M).$$

  No es difícil comprobar que si $(\mathbf{d}, \mathbf{r}) \in \mathcal{A}(M)$, entonces $\mathbf{d}$ es una solución de la ecuación Diofantina $f_M(X) = 0$. Note sin embargo que el converso no es cierto.

En esta charla presentaremos un algoritmo el cual computa las EA de una matriz entera no negativa L con ceros en la diagonal. Más aun, estas ideas se generalizaran a una clase mas amplia de polinomios, los cuales llamamos dominados, para obtener un algorítmo para este nuevo caso. Esto nos da un conjunto amplio de ecuaciones Diofantinas donde el décimo problem de Hilbert tiene una respuesta positiva.

Trabajo en conjunto con Ralihe R. Villagran.