V Encuentro Conjunto de la Real Sociedad Matemática Española (RSME) y la Sociedad Matemática Mexicana (SMM)

14-18 de junio de 2021

Centro de Investigación en Matemáticas (CIMAT), Guanajuato, México (virtual)
https://rsmeysmm.eventos.cimat.mx/node/1409

Programa de la Sesión Especial

La Transformada de Wavelet (de Ondículas)

Conferenciantes: Salvador Arellano Balderas (UAM), Gustavo Adolfo Garrigós Aniorte (UM), Eugenio Hernández Rodríguez (UAM), Ángel San Antolín Gil (UA), Moisés Soto Bajo (BUAP), Daniel Vera Rea (CIMAT).

Organizadores: Antonio Luis Baison Olmo (UAM) y Ángel San Antolín Gil (UA).

Programa (Viernes, 18 de junio de 2021)

- 12:00-13:00 (GTM-5) / 19:00-20:00 (GTM +2):
  - Eugenio Hernández: *Ondículas, localización de singularidades y tratamiento de señales.*

- 13:00-14:00 (GTM-5) / 20:00-21:00 (GTM +2):

  Preguntas y discusión sobre las conferencias grabadas:
  - Ángel San Antolín Gil: *Ondículas con soporte compacto asociadas a dilataciones* $E_d^2(Z)$.
  - Gustavo Adolfo Garrigós Aniorte: *La wavelet de Haar en los espacios de Besov y Triebel-Lizorkin.*
  - Davide Barbieri: *Aproximación óptima en espacios invariantes por grupos no abelianos.*
  - Salvador Arellano Balderas: *Convergencia Local de la Transformada Wavelet Semidiscreta en* $L^p(R)$.
  - Daniel Vera Rea: *Shearlets e imagenología.*
  - Moises Soto Bajo: *Señales electroencefalográficas y ritmos cerebrales; Análisis de Fourier, funciones de banda limitada y localización en tiempo-frecuencia: un nuevo enfoque.*

Títulos y resúmenes

- Eugenio Hernández (Universidad Autónoma de Madrid)
  eugenio.hernandez@uam.es
  Título: *Ondículas, localización de singularidades y tratamiento de señales.*
  Resumen: El premio Abel 2017 se le concedió a Y. Meyer por su "por su importante papel en el desarrollo de la teoría matemática de las ondículas". El premio Princesa de Asturias de Investigación Científica y Técnica 2020 se le concedió a Y. Meyer, I. Daubechies, T. Tao y E. Candès por "*sus contribuciones pioneras y trascendentales a las teorías y técnicas matemáticas para el procesamiento de datos, que ..... son base y soporte de la moderna era digital*". Han pasado 35 años desde que Y. Meyer descubriera "el milagro de las bases frecuentes". Presentaremos en esta conferencia una descripción de los resultados principales de la teoría de las ondículas siguiendo su desarrollo histórico, así como su aplicación a la localización de singularidades y al tratamiento de imágenes, en particular al algoritmo de compresión JPEG2000.

- Ángel San Antolín Gil (Universidad de Alicante)
  angel.sanantolin@ua.es
  Título: *Ondículas con soporte compacto asociadas a dilataciones $E_d^2(Z)$.*
  Resumen: Observamos que mientras en la literatura, las ondículas con soporte compacto y con buenas propiedades de aproximación en dimensión uno y con dilatación diádica están muy estudiadas, en el contexto multidimensional, solo se conocen ondículas con soporte compacto asociadas a algunas dilataciones. De hecho, determinar la existencia de ondículas con soporte compacto en Rd asociadas a cualquier dilatación A, dada por una aplicación linear expansiva que deja invariante al retículo de los enteros, es un problema abierto. En esta charla, ponemos énfasis en las dilataciones A con determinante ± 2. Veremos que si existe un conjunto auto-afín asociado a A, entonces existen ondículas ortonormales simétricas, con soporte compacto y con cualquier número deseado de momentos nulos. Daremos ejemplos de nuestra construcción en los casos particulares cuando las ondículas están asociadas a dilataciones en R_2 y a la dilatación Quincunx en R_3, porque podemos quitar la hipótesis de existencia de los conjuntos auto-afines. Nuestra construcción se basa en la estructura del grupo

cociente $(A*)^-1Z_d/Z_d$, filtros de paso bajo en dimensión uno y técnicas de análisis multiresolución. Trabajamos en el lado de la transformada de Fourier. Los resultados que presento son parte de un trabajo conjunto con M.L. Arenas.

- Gustavo Adolfo Garrigós Aniorte (Universidad Autónoma de Murcia)
gustavo.garrigos@um.es
Título: *La wavelet de Haar en los espacios de Besov y Triebel-Lizorkin.*
Resumen: En esta charla caracterizamos cuándo el sistema de Haar es una base de Schauder, o una base incondicional, en los espacios de suavidad de tipo Besov B(s,p,q), y Triebel-Lizorkin F(s,p,q) en R^d. En particular, determinamos el rango completo de índices s, p, q en los que se tienen estas propiedades, así como algunas variantes más débiles (base local o basic sequence). Las regiones de exponentes (s,1/p) resultan marcadamente distintas para cada clase de espacios, y en los casos extremales la respuesta depende del segundo índice q. Estos resultados dan respuesta a un problema planteado por Triebel, que estaba abierto incluso para los espacios clásicos de Sobolev $H^s_p(R)$.

Las demostraciones se basan en estimaciones uniformes precisas para los operadores P_j, que en el caso de la wavelet de Haar es el operador de promedios sobre cubos diádicos de lado $1/2^j$. Los contenidos de la charla forman parte de varios trabajos desarrollados conjuntamente con Andreas Seeger y Tino Ullrich.

- Davide Barbieri (Universidad Autónoma de Madrid)
davide.barbieri@uam.es
Título: *Aproximación óptima en espacios invariantes por grupos no abelianos.*
Resumen: Se considera el problema de aproximar un conjunto de datos formado por imágenes naturales, usando un marco de Parseval generado por traslaciones y rotaciones de una familia de generadores. El objetivo es encontrar, una vez fijado el número de generadores, los que permiten obtener la mejor aproximación en la norma L2. Se trata de un problema de análisis de Fourier abstracto en grupos no abelianos, siendo el grupo de rotaciones y traslaciones un grupo bien conocido por sus buenas propiedades a la hora de tratar imágenes. Se presentará la construcción explícita de estos generadores, y su implementación numérica.

- Salvador Arellano Balderas (Universidad Autónoma Metropolitana - Azcapotzalco)
  sab@azc.uam.mx
  Título: *Convergencia Local de la Transformada Wavelet Semidiscreta en $L^p(R)$.*
  Resumen: En la teoría de la transformada de Fourier se establece que la suavidad de una función por la rapidez del decaimiento de sus coeficientes de Fourier. En el caso de la teoría de la transformada wavelet continua la suavidad de una función se establece por la convergencia local. En esta conferencia generalizamos este resultado para la transformada semidiscreta en los espacios $L^p(R)$, $1 < p < \infty$.

- Daniel Vera Rea (Centro de Investigación en Matemáticas)
  daniel.vera@cimat.mx
  Título: *Shearlets e imagenología.*
  Resumen: El análisis de Fourier (AF) tiene muchas aplicaciones tanto en las matemáticas como en ciencias e ingeniería. Las wavelets es otro sistema de representación de funciones o señales muy exitoso tanto en el procesamiento digital de señales (formato JPG2000) como en otras áreas de las matemáticas (análisis funcional, operadores, multifractales). Sin embargo, las wavelets no son óptimas para representar algunas clases de funciones de dimensiones mayores a 1. En la charla hablaré de lo anterior e introduciré el sistema de representación multiescala y multi-direccional conocido como shearlets y sus aplicaciones a la imagenología biomédica.

- Moises Soto Bajo (Benemérita Universidad Autónoma de Puebla)
  moises.soto@fcfm.buap.mx
  Título: *Señales electroencefalográficas y ritmos cerebrales; Análisis de Fourier, funciones de banda limitada y localización en tiempo-frecuencia: un nuevo enfoquel.*
  Resumen: El análisis de señales electroencefalográficas (EEG) está basado en el concepto de ritmos cerebrales, asociados a rangos de frecuencias. Esto se suele modelizar matemáticamente usando funciones de banda limitada y otros conceptos similares. Sin embargo, en relación a señales generales más allá de funciones sinusoidales puras, de forma intrínseca el concepto de frecuencia parece ser más com-

plejo de lo que usualmente se supone. Además, en el marco del Análisis de Fourier (disciplina dominante en las aplicaciones del procesamiento de señales), éste está estrechamente ligado a las herramientas matemáticas clásicas (series de Fourier, transformada de Fourier), lo que hace que su interpretación física, como velocidad de oscilación, se enturbie.

En este trabajo se propone un nuevo enfoque que pretende arrojar algo de luz sobre este tema, tratando de aportar a la solución del problema de localización en tiempo-frecuencia de señales. Incidentalmente y de manera colateral, nuestro estudio desembocó en un análisis sobre la propia naturaleza de la transformada de Fourier y las funciones de banda limitada. Los productos de este trabajo son, por un lado, resultados teóricos que ayudan a entender mejor estas herramientas clásicas, y por otro lado el desarrollo de una metodología alternativa para el análisis de señales, en especial de señales bioeléctricas como el EEG. .